Cours du 15.03.2021 APRES-MIDI

lundi, 15 mars 2021 13:01

Récap :

Base orthonormée de $\mathbb{R}^N$

- N vecteurs à N dimensions $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N$
- Famille libre (pas dans la même direction)
- Norme = 1 $\|\vec{x}_i\| = 1 \quad (i = 1, \ldots, N)$
- Orthogonaux (perpendiculaires)

$$\langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = 0 \quad \text{si } i \neq j \qquad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \ldots + x_N \cdot y_N$$

Base génératrice PAS orthonormé - c'est possible, il faut qu'elle contienne une famille libre d'au moins N vecteurs.

Famille libre : les vecteurs $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_N$ forment une famille LIBRE si

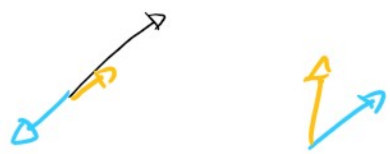
1) Aucun vecteur de la famille ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des N-1 autres

2) La seule solution au système d'équations

$$\underbrace{\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_N \vec{x}_N}_{\lambda_i \text{ sont les inconnues !}} = \vec{0}$$

a pour seule solution

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_N = 0 \,!$$



PAS Libre car LIBRE

$$\underbrace{1 \cdot \vec{x}_1 + 2 \vec{x}_2}_{\lambda_1 \neq 0 \quad \lambda_2 \neq 0} = \vec{0}$$

Questions :

1. Une famille contenant le vecteur NUL peut-elle être libre ?

NON ce n'est PAS possible ! $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{0}$

VRAI

On cherche une solution à $\underbrace{\lambda_1}_{0}\vec{x} + \underbrace{\lambda_2}_{0}\vec{y} + \underbrace{\lambda_3}_{\substack{36264 \\ \neq \\ 0}}\vec{0} = \vec{0}$

les coef. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 36264$ est sol pour $\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} + \lambda_3\vec{0} = \vec{0}$ $\lambda_3 \neq 0$

PAS une fam Libre !

2. Les 3 vecteurs suivants forment-ils une famille libre

$$\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{x_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si on est malin, on voit que $\vec{x_1} + \vec{x_2} = \vec{x_3}$

$\vec{x_3}$ est comb. lin. des 2 autres

PAS Libre !

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Posons $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$

$$\lambda_1\vec{x_1} + \lambda_2\vec{x_2} + \lambda_3\vec{x_3} = \vec{x_1} + \vec{x_2} - \vec{x_3} = \vec{x_1} + \vec{x_2} - (\vec{x_1} + \vec{x_2})$$
$$= \vec{x_1} + \vec{x_2} - \vec{x_1} - \vec{x_2} = \vec{0}$$

La sol. à $\lambda_1\vec{x_1} + \lambda_2\vec{x_2} + \lambda_3\vec{x_3} = \vec{0}$ où au moins 1 $\lambda_i \neq 0$ $\Rightarrow$ Pas une fam. LIBRE

Et si on ne voit pas que $\vec{x_1} + \vec{x_2} = \vec{x_3}$ $(\vec{x_3} - \vec{x_2} = \vec{x_1})$...

Il faut alors CALCULER les solutions de $\lambda_1\vec{x_1} + \lambda_2\vec{x_2} + \lambda_3\vec{x_3} = \vec{0}$ inconnues !

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \cdot \lambda_1 \\ 1 \cdot \lambda_1 \\ 1 \cdot \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\lambda_2 \\ 2\lambda_2 \\ 1\lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\lambda_3 \\ 3\lambda_3 \\ 2\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(en ex...)

Transformé l'add. vectorielle en SYST. EQU !

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$ même équ ?

a SYST. EQU!

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

même équ!

(en ex...)

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_3 = -\lambda_2 \end{cases}$$

3 équ.
3 inconnues

2 équ.
3 inconnue

Système sous-déterminé
$\Rightarrow$ ∞-té de sol!

$\boxed{\text{Fixons } \lambda_2 = -2}$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = -\lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$-2\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

$$-2\vec{x}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\-2\end{pmatrix}$$

$$2\vec{x}_3 = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\\4\end{pmatrix}$$

vérifions que

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \lambda_3\vec{x}_3 = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-4\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\6\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = 2 \end{matrix}\right\} \underset{\text{NON NULLE}}{\text{sol}} \text{ à } \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \lambda_3\vec{x}_3 = \vec{0} \Rightarrow \text{PAS Libre!}$$

3. Les 3 vecteurs suivants forment-ils une famille libre ?

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \quad \vec{y}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\lambda_1\vec{y}_1 + \lambda_2\vec{y}_2 + \lambda_3\vec{y}_3}_{} = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \text{ !}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_1]{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 0 + \lambda_2 \quad 0 = 0 \\ 0 + 0 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 0 + 0 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

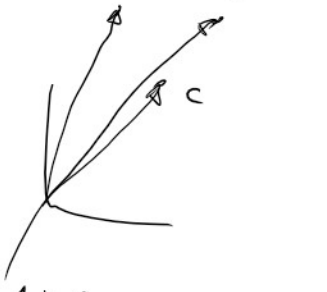
$\lambda =$

$\ldots + 2\lambda_3 = 0$ $\qquad \ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_1 \quad \{\, 0 + 0 + \lambda_3 = 0 \qquad \{\, \lambda_3 = 0$

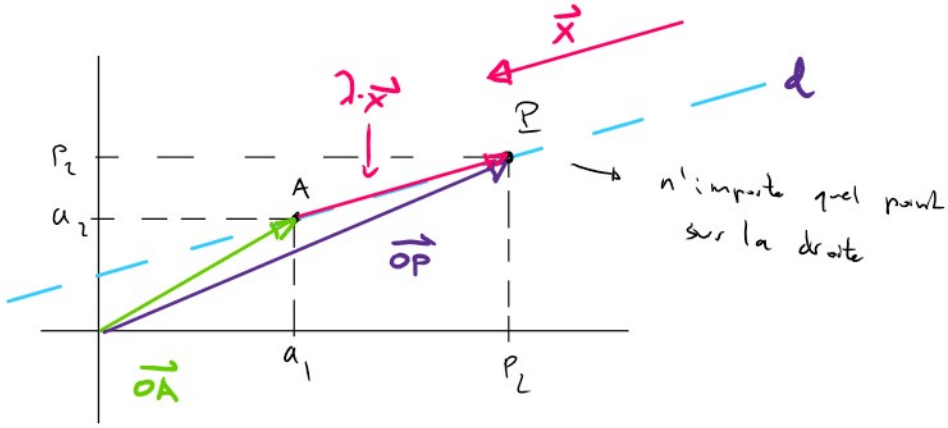
3 éq.
3 inconn.

$\Rightarrow$ SI $\lambda_1 \vec{y_1} + \lambda_2 \vec{y_2} + \lambda_3 \vec{y_3} = \vec{0}$
ALORS $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ } c'est LIBRE!

Pour définir une droite (en 2D) il faut
- 2 points
- 1 point et 1 vecteur



A B C ne sont PAS dans le même plan SI $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ et $\vec{OC}$ sont FAM. LIBRE



$\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \vec{x}$ $\qquad$ $\vec{x}$ est le vecteur directeur !

Avec cette écriture vectorielle, si on connait la direction $\vec{x}$
et un point par lequel passe la droite A
Alors tout point sur la droite (définie de manière unique par A et $\vec{x}$) s'écrit sous la forme

$$\text{I} \quad \vec{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

[$y = ax + b$
pente
ordonnée à l'origine)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \text{CONNUS CONSTANTS} \qquad \left.\begin{array}{l} \vec{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{PARAMÈTRES}$$

Si on transforme I en système d'équations

$$\boxed{\text{II} \begin{cases} p_1 = a_1 + \lambda x_1 \\ p_2 = a_2 + \lambda x_2 \end{cases}}$$

$a_1, a_2, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ connus est constants

$p_1, p_2, \lambda \in \mathbb{R}$ paramètres variables

Ce système d'équation est appelé les ***équations paramétriques*** d'une droite.
Tout point de la droite vérifie les équations paramétriques pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

Isolons le paramètre variable dans chacune des équations

$$\begin{cases} p_1 = a_1 + \lambda x_1 \\ p_2 = a_2 + \lambda x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{p_1 - a_1}{x_1} \\ \lambda = \dfrac{p_2 - a_2}{x_2} \end{cases}$$

⚠ $x \neq 0$!

⚠ $x_2 \neq 0$!

Donc $\dfrac{p_1 - a_1}{x} - \dfrac{p_2 - a_2}{} = 0$ car $\lambda = \lambda$

Donc $\frac{p_1 - a_1}{x_1} - \frac{p_2 - a_2}{x_2} = 0$ car $\lambda - \lambda = 0$

Multiplions des deux côtés par $x_1 \cdot x_2$

$$p_1 x_2 - a_1 x_2 - p_2 x_1 + a_2 x_1 = 0$$

$$\boxed{p_1 x_2 - p_2 x_1 + (a_2 x_1 - a_1 x_2) = 0}$$

C'est l'équation cartésienne d'une droite.

Si le point p est sur la droite, alors l'équation cartésienne vaut 0. Si l'équation ne vaut PAS 0, alors le point n'est pas sur la droite !